Aplicaciones de armónicas

- Flujo de Fluidos
- Flujo de Calor
- Electrostática

FLUIDOS → descrito por velocidad $\vec{V}(x,y,z,t)$

Asumimos:

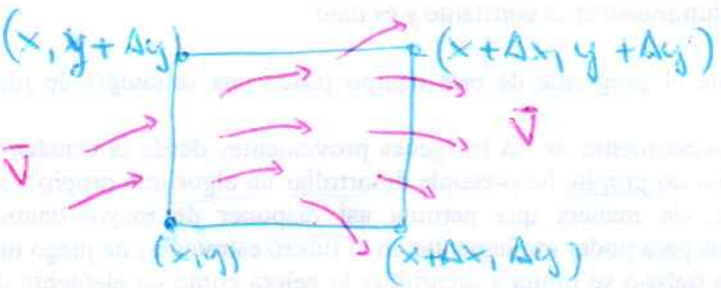
. fluido bidimensional $\quad \bar{V} = \bar{V}(x,y,t) = (P(x,y,t), Q(x,y,t))$

. estacionario $\quad \bar{V} = \bar{V}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

fluido ideal

. no viscoso (no hay fricción interna)

. incompresible: masa total contenida en un volumen no cambia ~ densidad constante



cantidad de fluido que ingresa por lado $(x,y) \leftrightarrow (x,y+\Delta y)$

$$\underbrace{\bar{V}\cdot(1,0)}_{\text{componente normal de } \bar{V}} \cdot \Delta y = P(x,y)\cdot \Delta y$$

cantidad de fluido que ingresa por lado $(x,y) - (x+\Delta x, y)$

$$\bar{V}\cdot(0,1)\,\Delta x = Q(x,y)\,\Delta x$$

cantidad de fluido que ingresa por los otros lados:

$$\bar{V}\cdot(-1,0)\,\Delta y = -P(x+\Delta x,y)\cdot\Delta y$$

$$\bar{V}\cdot(0,-1)\,\Delta x = -Q(x,y+\Delta y)\cdot\Delta x$$

Cantidad neta de fluido que ingresa:

$$P(x,y)\,\Delta y + Q(x,y)\,\Delta x - P(x+\Delta x, y)\cdot\Delta y - Q(x, y+\Delta y)\,\Delta x =$$

$$= \left(\frac{P(x,y) - P(x+\Delta x, y)}{\Delta x}\right)\Delta x\,\Delta y + \left(\frac{Q(x,y) - Q(x, y+\Delta y)}{\Delta y}\right)\Delta x\,\Delta y$$

Como es incompresible y en ausencia de fuentes y sumideros,

flujo neto $= 0$

$$\left(\frac{P(x,y) - P(x+\Delta x, y)}{\Delta x} + \frac{Q(x,y) - Q(x, y+\Delta y)}{\Delta y}\right)\Delta x\,\Delta y = 0$$

Con $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$:

$$\boxed{P'_x(x,y) + Q'_y(x,y) = 0}$$

$$\nabla\cdot\bar{V}(x,y) = \operatorname{div}\bar{V}(x,y) = 0$$

- irrotacional: $\operatorname{rot}\bar{V} = \bar{0}$

$$Q'_x(x,y) - P'_y(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{Q'_x(x,y) = P'_y(x,y)}$$

Si el dominio es simplemente conexo

$\Rightarrow$ $\bar{V}$ es conservativo $\Rightarrow \boxed{\bar{V} = \nabla\phi}$ ϕ: función potencial

$$\bar{V} = (P, Q) = (\phi'_x, \phi'_y)$$

$$\operatorname{div}\bar{V} = P'_x + Q'_y = \phi'_{xx} + \phi'_{yy} = 0$$

$\Rightarrow \boxed{\phi \text{ es armónica!}}$

$\phi(x,y)$: potencial de velocidad

$\alpha(x,y)$: conjugado armónico de ϕ

α función de corriente

$f(z) = \phi(x,y) + i\,\alpha(x,y)$: es holomorfa

"potencial complejo de velocidad"

$$f'(z) = \phi'_x(x,y) + i\,\alpha'_x(x,y)$$

$$= \phi'_x(x,y) - i\,\phi'_y(x,y)$$

$$= P(x,y) - i\,Q(x,y) = \overline{\vec{V}(x,y)}$$ → conjugado de velocidad

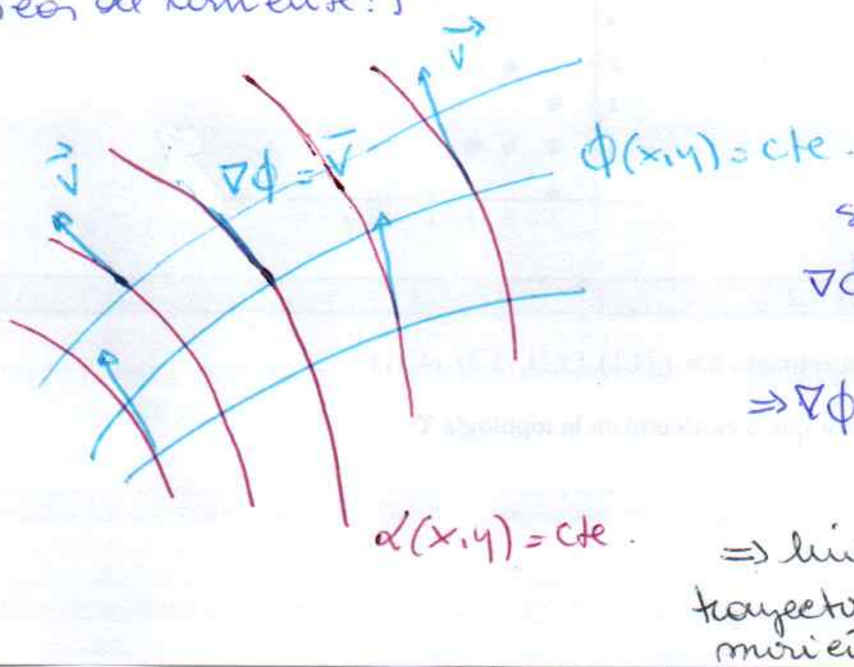
o: $\vec{V}(x,y) = \overline{f'(z)}$

Equipotenciales y líneas de campo:

Líneas equipotenciales: $\phi(x,y) = cte$

Líneas de campo o líneas de corriente: $\alpha(x,y) = cte$.

familias ortogonales



si $\nabla\phi \neq (0,0)$:

$\nabla\phi$: ortogonal a equipotenciales

$\Rightarrow \nabla\phi$: tangente a líneas de campo.

$\Rightarrow$ líneas de campo: trayectoria de un objeto moviéndose con esa velocid

Flujo de calor

Asunciones:

- flujo bidimensional
- estacionario

$T(x,y)$: temperatura en pto (x,y) de un cuerpo

$\vec{Q} = -K\nabla T$: flujo de calor (o densidad de flujo de calor)

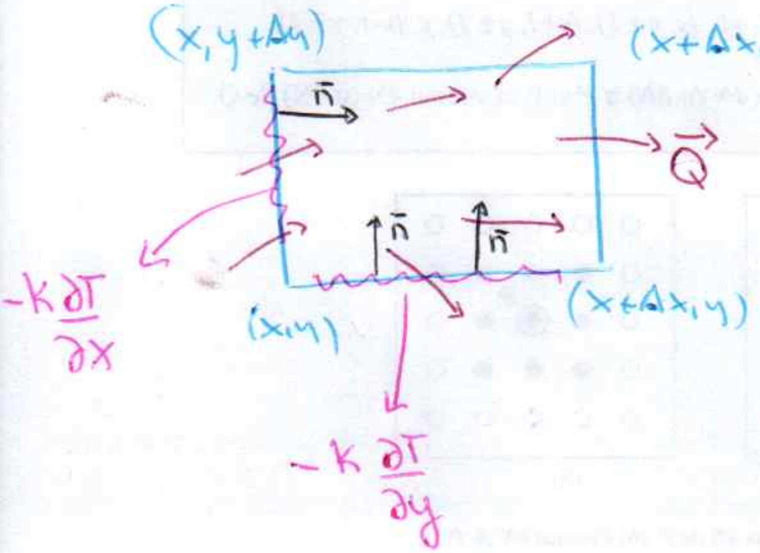
dirección en que energía calorífica se transporta con mayor rapidez

K: constante conductividad térmica.

flujo de calor a través de una superficie: cantidad de energía que fluye por unidad de tiempo

$\vec{Q} \cdot \vec{n} \cdot dA$

- si no hay fuentes ni sumideros: flujo neto de calor en un volumen $= 0$



flujo neto que ingresa:

$$0 = -KT'_x(x,y)\,\Delta y + KT'_x(x+\Delta x, y)\,\Delta y - KT'_y(x,y)\,\Delta x + KT'_y(x, y+\Delta y)\,\Delta x$$

$$\Rightarrow \quad T''_{xx}(x,y) + T''_{yy}(x,y) = 0$$

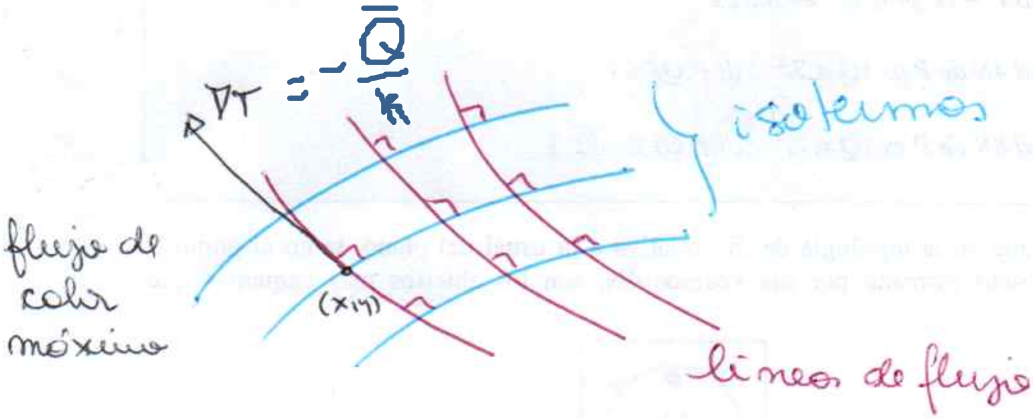
$$\Rightarrow \boxed{T \text{ es armónica}}$$

Sea $\alpha(x,y)$ la conjugada armónica de T:

$f(z) = T(x,y) + i\,\alpha(x,y)$: temperatura compleja

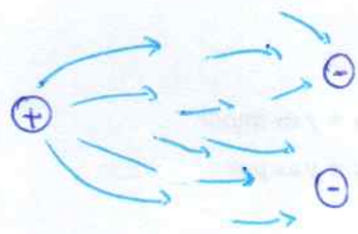
$T(x,y) = cte$: líneas isotérmicas o isotermas

$\alpha(x,y) = cte$: líneas de flujo



Electrostática

Distribución carga $\longrightarrow$ flujo eléctrico



$\vec{E}$: campo eléctrico en un pto (x,y) generado por cargas estáticas

$\vec{E} = -\nabla\phi$

ϕ : potencial electrostático

flujo de campo eléctrico a través de una superficie que encierra volumen sin carga $= 0$

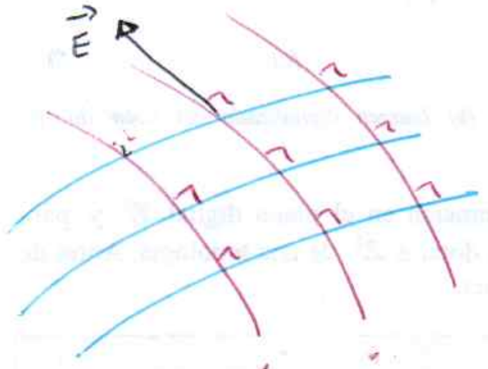
$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \phi''_{xx} + \phi''_{yy} = 0 \Rightarrow \boxed{\phi \text{ es armónica}}$

Sea α su conjugada armónica

$f(z) = \phi(x,y) + i\alpha(x,y)$: potencial electrostático complejo

α: función de corriente

$\vec{E} = -\nabla\phi$ es paralelo a $\underbrace{\text{líneas de corriente}}_{\text{curvas de nivel de } \alpha}$



$\phi = \text{cte}$
equipotenciales

$\alpha = \text{cte}$: línea de corriente
o líneas de flujo

Resumen:

ϕ: potencial de velocidad	T: temperatura	ϕ: potencial electrostático
$\vec{V} = \nabla\phi$: velocidad	$\vec{Q} = -k\nabla T$ flujo de calor	$\vec{E} = -\nabla\phi$: campo eléctrico
$f(z) = \phi + i\alpha$ potencial complejo	$f(z) = T + i\alpha$ temperatura complejo	$f(z) = \phi + i\alpha$ potencial complejo
$\overline{f'(z)} = \vec{V}$	$\dfrac{\overline{f'(z)}}{-k} = \vec{Q}$	$-\overline{f'(z)} = \vec{E}$

Ejemplo (Ejercicio 44, TP3)

$f(z) = \frac{1}{z}$: potencial complejo de velocidad.

Velocidad?

Equipotenciales?

Líneas de corriente por $(1,1)$?

línea equipotencial por $(1,1)$?

$$\vec{V} = \overline{f'(z)} = \overline{\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = -\frac{1}{\bar{z}^2} = -\frac{z^2}{\bar{z}^2 z^2} = -\frac{\left[(x^2-y^2)+i\,2xy\right]}{(x^2+y^2)^2}$$

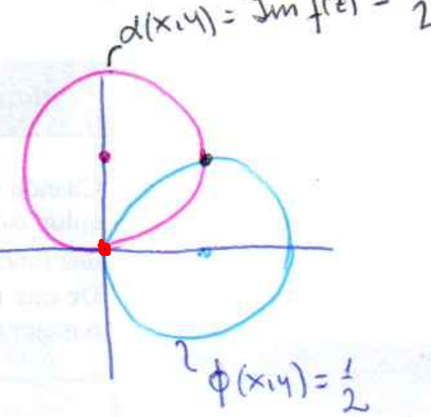
$$= \underbrace{\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}}_{P(x,y)} + i\,\underbrace{\frac{(-2xy)}{(x^2+y^2)^2}}_{Q(x,y)} \qquad \vec{V} = (P,Q)$$

Equipot: $\phi(x,y) = cte$

$$Re(f) = cte \Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2} = c \Rightarrow x = c(x^2+y^2)$$

si $c \neq 0$:
$$\boxed{x^2 - \frac{x}{c} + y^2 = 0}$$
$$\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4c^2}$$

Por $(1,1)$: $c = \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $\boxed{(x-1)^2 + y^2 = 1}$



Líneas de cte: $Im\, f = b$ si $b \neq 0$

$$\frac{-y}{x^2+y^2} = b \Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{y}{b} = 0$$

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2b}\right)^2 = \frac{1}{4b^2}$$

En $(1,1)$: $b = -\frac{1}{2}$

$$\boxed{x^2 + (y-1)^2 = 1}$$